

DOI: <https://doi.org/10.32735/S2810-7187202500014066>

ESTUDO DE FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DA MEDIÇÃO POR MEIO DO CUISENAIRE FÍSICO E DIGITAL¹

ESTUDIO DE LAS FRACCIONES DESDE LA PERSPECTIVA
DE LA MEDIACIÓN A TRAVÉS DEL CUISENAIRE FÍSICO Y DIGITAL

STUDY OF FRACTIONS FROM THE PERSPECTIVE OF MEDIATION
THROUGH THE PHYSICAL AND DIGITAL CUISENAIRE

Ingrid Ponvequi Oliveira² • Maria Ivete Basniak³

Recibido: 30/09/2025 • Aceptado: 13/11/2025 • Publicado: 15/12/2025

RESUMO

O estudo é fruto de uma pesquisa qualitativa cujo alicerce está nas frações como medida e no uso das Barras Cuisenaire digital e física, cujo objetivo foi investigar diferenças entre o uso do Cuisenaire digital e físico para o ensino de frações na perspectiva da medição. Esta pesquisa discute dois contextos diferentes. O primeiro deles toma como referência os dados produzidos a partir da pesquisa que trabalhou com o Cuisenaire digital em 2020, em contexto pandêmico de isolamento social e o segundo que utilizou o Cuisenaire físico quando as aulas estavam retornando a presencialidade em 2021. As análises, alicerçadas na Gênese Instrumental, evidenciaram que as Barras Cuisenais tanto físicas quanto digitais não são somente um artefato em

¹ Este artigo é um recorte da dissertação de mestrado da primeira autora, sob orientação da segunda autora, cujo texto na íntegra encontra-se em <https://repositorio.unespar.edu.br/items/66716764-2694-459b-97ef-7c66bfc4de08>.

² Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), Brasil, Mestre em Educação Matemática (PRPGEM); ingridponvequi1@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-1187-9594>

³ Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), Brasil; Programa de Pós Graduação em Educação Matemática (PRPGEM); maria.basniak@unespar.edu.br; <https://orcid.org/0000-0001-5172-981X>

que são visualizados atributos de cores e tamanhos, mas se transformam em um instrumento usado para medir, contribuindo para a aprendizagem de frações na perspectiva de medição. Conclui-se que isso possui relação também com o objetivo e intencionalidade da tarefa de natureza exploratório, a qual a partir da mediação do professor permite ao estudante utilizar estratégias em que as barras assumem posição de instrumento para realizar medições.

Palavras-chave: Ensino Exploratório de Matemática; Gênese Instrumental; medida; Educação Matemática.

ABSTRACT

The study is the result of qualitative research based on fractions as a measure and the use of digital and physical Cuisenaire rods. The objective was to investigate differences between the use of digital and physical Cuisenaire rods for teaching fractions from a measurement perspective. This research discusses two distinct contexts. The first uses data produced from research that used the digital Cuisenaire in 2020, during the pandemic context of social isolation, and the second used the physical Cuisenaire when classes were returning to in-person classes in 2021. The analyses, based on Instrumental Genesis, showed that both physical and digital Cuisenaire rods are not merely artifacts in which color and size attributes are visualized, but also become instruments used for measurement, contributing to the learning of fractions from a measurement perspective. It is concluded that this is also related to the objective and intentionality of the exploratory task, which, through the teacher's mediation, allows the student to use strategies in which the bars assume the position of an instrument to perform measurements.

Keywords: Exploratory Mathematics Teaching; Instrumental Genesis; Measurement; Mathematics Education.

RESUMEN

El estudio es el resultado de una investigación cualitativa basada en fracciones como medida y el uso de varillas de Cuisenaire digitales y físicas. El objetivo fue investigar las diferencias entre el uso de varillas de Cuisenaire digitales y físicas para la enseñanza de fracciones desde una perspectiva de medición. Esta investigación discute dos contextos distintos. El primero utiliza datos

producidos a partir de una investigación que utilizó la varilla de Cuisenaire digital en 2020, durante el contexto pandémico de aislamiento social, y el segundo utilizó la varilla de Cuisenaire física cuando las clases regresaban a clases presenciales en 2021. Los análisis, basados en Génesis Instrumental, mostraron que tanto las varillas de Cuisenaire físicas como las digitales no son simplemente artefactos en los que se visualizan atributos de color y tamaño, sino que también se convierten en instrumentos utilizados para la medición, contribuyendo al aprendizaje de fracciones desde una perspectiva de medición. Se concluye que esto también está relacionado con el objetivo e intencionalidad de la tarea exploratoria, que, a través de la mediación del docente, permite al estudiante utilizar estrategias en las que las varillas asumen la posición de un instrumento para realizar mediciones.

Palabras clave: Enseñanza de las Matemáticas Exploratorias; Génesis Instrumental; medición; Educación Matemática.

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática investiga alternativas e metodologias para o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos (Godoy, 2015; Pinto, 2005). Ela busca uma Matemática que esteja ao alcance de todos os estudantes, porque se almeja “[...] um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulações de ideias” SEED, 2008, p. 48).

No que se refere à aprendizagem e ensino de frações, pesquisadores têm voltado esforços em busca de entender as falhas e entraves no ensino e na aprendizagem, apontando ideias e abordagens possíveis para superar as dificuldades (Powell, 2018a, 2018b, 2019a, 2019b; Powell & Ali, 2018). A importância do entendimento de frações, é um dos conhecimentos notáveis em razão de desempenhar papel importante, não apenas para a vida escolar do estudante, influenciando seu futuro acadêmico e social, mas “crucial para a justiça social e o alcance da equidade social” (Powell & Ali, 2018, p. 79). Desse modo, negligenciar essa temática afeta a aprendizagem do estudante para apreensão de estudos posteriores, também para a aprendizagem da Álgebra (Bailey *et al.*, 2012; Powell & Ali, 2018).

A falta de compreensão sobre frações pode contribuir para defasagem da aprendizagem em Matemática e desinteresse nas áreas que utilizam essa ciência (Lamon, 2012).

Os Números Racionais são discutidos sob diferentes perspectivas: medida, parte-todo, quociente, operador e razão (Behr *et al.*, 1983; Kieren, 1976, 1980; Lamon, 2012). O ensino brasileiro tem se apoiado predominantemente na perspectiva parte-todo (Scheffer & Powell, 2019), que segundo alguns autores (Bertoni, 2008; Powell, 2019a; Powell & Ali, 2018) podem gerar problemas de aprendizagem.

É comum professores relacionarem essa perspectiva à divisão de alimentos, objetos do cotidiano, o que não contribui para a aprendizagem de frações, pois essas relações podem gerar confusões conceituais, uma vez “[...] que a divisão em partes iguais de um objeto não atribui significado a uma fração imprópria, uma fração cujo numerador é maior que o seu denominador” (Powell, 2019b, p. 702). Logo, os estudantes não compreendem frações impróprias, como $\frac{5}{4}$, pois não entendem como ter 5 partes de um objeto que é dividido em 4. Existe, ainda, a dificuldade cognitiva referente ao quesito de partes iguais: “contar partes não congruentes para nomear uma fração de um terço em um círculo que está dividido ao meio e dois quartos” (Ni & Zhou, 2005, p. 29).

A aula expositiva, que consiste na transmissão de informações e conceitos pelos professores para os estudantes, ainda predomina no ensino de matemática (Ponte, 2005). Nesse modelo de aula, o docente transcreve para os discentes exercícios de fixação, acreditando que eles aprenderão por meio da reprodução, sendo evidenciada a “realização de atividades com repetição dos procedimentos por parte dos alunos” (Franke *et al.*, 2007, p. 256).

Alguns estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem porque há ênfase nas habilidades procedimentais para Números Racionais na grade escolar, e o “desempenho geralmente ruim pode ser um resultado direto dessa ênfase curricular nos procedimentos, em vez do desenvolvimento cuidadoso de importantes entendimentos funcionais” (Behr *et al.*, 1983, p. 92).

Porém, diferentes metodologias e materiais para o ensino de frações, como Régua de Frações, Barras Cuisenaire, jogos e softwares podem auxiliar o professor a assumir papel de mediador, e o estudante, o de protagonista do seu aprendizado (SEED, 2008).

Portanto, a habilidade matemática, é potencializada se o estudante “for sujeito a uma experiência matemática rica e diversificada, em que lhe seja possível refletir através da realização de tarefas tais como resolução de problemas, atividades de investigação, realização de projetos e jogos” (Botas & Moreira, 2013, p. 254). Consequentemente, o estudante torna-se instruído

para sanar diversas situações-problema e pode refletir sobre desenvolver noções matemáticas em diversas situações (Botas & Moreira, 2013).

Um dos modos de impulsionar variadas experiências de aprendizagem matemática é por meio do material didático, o qual desempenha papel importante na matemática abstrata/complexa (Botas & Moreira, 2013). Utilizar material didático apropriado permite a interação do estudante com o material, pois desperta o interesse e implica em situações de aprendizagem. Isto porque “os materiais podem constituir um suporte físico através do qual as crianças vão explorar, experimentar, manipular e desenvolver a observação” (Botas & Moreira, 2013, p. 254).

O docente precisa ter conhecimento sobre como utilizar esses materiais, e atualmente, também recursos associados às Tecnologias Digitais (TD). A tecnologia está em constante evolução, presente no cotidiano da sociedade, sendo seu uso indispensável para o trabalho humano. No ensino, o uso de recursos tecnológicos⁴ adequados pode facilitar a prática do professor em diversos aspectos, como deixar a aprendizagem mais interativa, além de ajudar na visualização dos conteúdos.

Partindo disso, é possível ampliar seu uso, e uma das suas possibilidades de utilização é no processo de ensino e de aprendizagem da matemática (Guimarães, 2015).

A partir disso, e das pesquisas de Powell (2018b), que trabalha com as Barras de Cuisenaire físicas e de Oliveira & Basniak (2021), que desenvolveu sua pesquisa com o Cuisenaire digital, delineou-se o objetivo desta pesquisa, que investigou diferenças entre o uso do Cuisenaire digital e físico para o ensino de frações na perspectiva da medição.

ENSINO DE FRAÇÕES

O sentido de frações e Números Racionais é um assunto complexo que confunde professores e estudantes (Lamon, 2012). A razão para isso é que todo Número Racional pode ser escrito na forma de fração, mas nem todo número escrito em forma de fração pertence aos Números Racionais (Rocha, 2013). A fração é um Número Racional, quando escrita na forma $\frac{a}{b}$, em que: a e b são números naturais e b é diferente de 0. Porém, se substituirmos o

⁴ Consideramos nesse texto que os materiais didáticos, nomeadamente os discutidos nesse texto, cuisenaire físico ou digital, são também recursos tecnológicos. Enquanto, o cuisenaire físico é um recurso tecnológicos analógico, o cuisenaire online, um recurso digital.

valor de a ou de b por um número irracional, a fração não representa um número racional. Entretanto, a fração para representar o conjunto dos Irracionais não é comumente usada (Silva, 2005).

Powell (2018b) reafirma a complexidade das frações, salientando ser seu conceito um dos conhecimentos matemáticos notáveis, pois conforme avançamos na escolarização, sua compreensão se torna importante e está presente em conteúdos mais avançados de matemática. Segundo o autor, negligenciar esse conteúdo traz implicações negativas na aprendizagem da Álgebra, pois os Racionais são uma base para esse ramo da Matemática (Powell, 2018b). Isso influencia no futuro acadêmico, profissional e social dos estudantes.

Kieren (1980) organizou as interpretações de frações como: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador. Para o autor, a relação parte-todo é pertinente quando se tem um todo que é dividido em partes iguais.

Quando utilizamos frações como medidas, é importante particionar a unidade continuamente; logo, o número de partes iguais pode diversificar conforme a quantidade de vezes de particionar seja necessária para realizar o processo (Lamon, 2012). Assim, relaciona-se com partição, mas se diferencia pela medição por ter um número fixo de partes iguais no mesmo elemento. A perspectiva de medição, sob uma abordagem alternativa, é “[...] uma concepção diferenciada, uma fração refere-se a uma relação, uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis” (Powell, 2019a, p. 57).

Logo, a introdução ao ensino de frações necessita ser contemplada com a interpretação das frações como medida, entendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades (Powell, 2019c; Powell & Ali, 2018). A justificativa é que

coincide com a gênese histórica das frações, que surgiu da necessidade de medir quantidades contínuas; a magnitude numérica é considerada; há necessidade de determinar uma unidade de medida; há ruptura com a ideia e propriedades dos números naturais, sendo necessário um novo campo numérico dos números Racionais, favorecendo a compreensão dos números fracionários (Doneda de Oliveira & Basniak, 2021a, p. 17).

Powell (2019b) apresenta a concepção alternativa de fração utilizando a perspectiva da medição com o uso das barras Cuisenaire. O objetivo é que os estudantes se apropriem da noção de magnitude e fração-de-quantidade para ampliar os conceitos de magnitude de frações, recordadas mentalmente por meio das imagens das

barras, e assim, compondo expressões de comparações fracionárias. Logo, essa foi a perspectiva utilizada para desenvolver a tarefa no presente trabalho.

GÊNESE INSTRUMENTAL

A Gênese Instrumental apoia-se na teoria da Ergonomia Cognitiva, que está relacionada a processos mentais, como a percepção e raciocínio, que possibilita estudo e análise das ações e interações entre os sujeitos e elementos de um sistema (Rabardel, 1995, 2002). A transformação do artefato em instrumento é denominada Gênese Instrumental, na qual o artefato pode ser um meio material ou um meio simbólico. O instrumento consiste no artefato acrescido de um esquema de utilização construído pelo sujeito, quando o incorpora em suas atividades (Artigue, 2011).

Rabardel (2002) enfatiza três elementos centrais na Gênese Instrumental: sujeito, instrumento e objeto. O sujeito pode ser considerado usuário, operador ou trabalhador, que utiliza artefatos, máquinas ou ferramentas para efetuar algum ato/ação, de acordo com seus conhecimentos, utilizando o apoio do artefato. O artefato é o objeto, podendo ser material ou simbólico, mas utilizado como ferramenta, de modo a dar amparo à atividade do sujeito na realização de determinada tarefa (Drijvers *et al.*, 2005). Sendo assim, esse processo de transformação do artefato em instrumento ocorre a partir de esquemas mentais de utilização, em que o sujeito realiza ações intencionais, nas quais ele se apropria do artefato.

Logo, compreendemos que o instrumento não se baseia apenas na ação do sujeito no artefato, mas é uma construção (Rabardel, 2002). O instrumento diz respeito a uma construção individual de cada sujeito, pois um artefato pode mudar e ser utilizado como instrumentos diferentes, de acordo com o sujeito e os esquemas que se utiliza, em razão de que “um instrumento não existe ‘por si só’; o artefato se transforma em um instrumento para um determinado sujeito quando este o incorpora às suas atividades” (Bittar, 2011, p. 160).

Isto posto, percebe-se a diferença entre instrumento e artefato, mas existe, ainda, uma dupla relação entre sujeito e artefato, visualizada em duas dimensões: a instrumentalização, que diz respeito a como o pensamento do sujeito afeta o artefato; e a instrumentação, que se refere a como o artefato afeta o comportamento e pensamento do sujeito (Basniak & Estevam, 2019).

Rabardel (2002) diferencia a instrumentação e instrumentalização na Gênese Instrumental esclarecendo que a primeira está direcionada ao sujeito e a segunda ao artefato. Na instrumentalização, o sujeito transforma o artefato,

de modo que o empregue em uma sequência de tarefas. O autor delimita essa dimensão como “um processo no qual o sujeito registra as propriedades do artefato. Esse processo está fundamentado nas características e propriedades intrínsecas do artefato e lhes confere um status alinhado à ação em andamento e à situação” (Rabardel, 2002, p. 80, tradução nossa).

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Esta pesquisa de natureza qualitativa utiliza dados empíricos produzidos em dois contextos diferentes, mas cujo planejamento das aulas em ambos, seguiram os pressupostos do Ensino Exploratório de Matemática (EEM): (i) introdução da tarefa; (ii) realização da tarefa; (iii) discussão coletiva da tarefa; e (iv) sistematização das aprendizagens matemáticas (Cyrino & Teixeira, 2016). O EEM é uma perspectiva inovadora de ensino e aprendizagem, contrapondo-se ao ensino tradicional, pois o professor assume papel de mediador e oportuniza tarefas desafiadoras, que exigem que os estudantes assumam a postura de protagonistas de sua resolução, além de desenvolver capacidades como resolução de problemas, raciocínio e comunicação (Canavarro, 2011; Estevam & Basniak, 2019).

Assim, no EEM, as tarefas são planejadas e organizadas pelos professores de modo que sejam desafiadoras e promovam a construção de conceitos e a compreensão dos procedimentos matemáticos adotados em sua resolução. Portanto, ao elaborar tarefas na perspectiva do EEM, o docente precisa ter a noção dos conhecimentos prévios e considerar que as tarefas precisam “ser um desafio e basear – se em uma situação concreta; possibilitar aos alunos a confiança em sua experiência quando resolvê-las e, portanto, fazer uso de várias estratégias com diferentes níveis de sofisticação matemática” (Oliveira & Cyrino, 2013, p. 218). É também construído um quadro de antecipação⁵ de ações do professor e dos estudantes, a fim de auxiliar na mediação dos estudantes quando realizam a tarefa. Assim, quando o estudante questiona o professor sobre algum item da tarefa que não compreendeu ou que tem dúvida na resolução, este quadro auxilia o professor para que ele possa por meio de perguntas dirigidas ao estudante, orientá-lo a refletir sobre o que está fazendo, trazendo seus conhecimentos prévios para superar seus desconhecimentos no que está fazendo e resolver a tarefa.

⁵ O quadro de antecipação da tarefa, assim como, o planejamento completo referente a essa tarefa está disponível no apêndice da dissertação de Doneda de Oliveira (p. 168-179) e pode ser acessada em: <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/7a1f76d5-9a1d-4b45-b358-162b68f4934c/content>

Nesse contexto, utilizamos os pressupostos teóricos da Gênese Instru-mental nas análises, buscando interpretar como um diferente artefato (cuisenaire físico e digital) é utilizado na resolução da tarefa: *Qual é o comprimento?*

Portanto, esta pesquisa articula dois contextos diferentes. O primeiro deles toma como referência os dados produzidos a partir da pesquisa de Oliveira & Basniak (2021), que trabalhou com o Cuisenaire digital em 2020, em contexto pandêmico de isolamento social. Assim, a Tarefa, denominada *Qual o comprimento?* (Figura 1) foi realizada de forma remota com duas turmas, com um total de 61 estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental. Todos os estudantes foram convidados a participar, dos quais, 30 preencheram os termos de assentimento e consentimento da pesquisa, e 22 deles participaram do início ao fim da pesquisa⁶. Essa tarefa teve como objetivo que os estudantes compreendessem a fração como medida.

- 1) Observe o material que vocês receberam.
- a) Utilizando barras de mesma cor, determinem o comprimento horizontal do retângulo. Façam isso para todas as cores.
 - b) Vocês já perceberam que algumas cores de barras ultrapassam o comprimento horizontal total do retângulo. Como vocês podem explicar aos colegas o comprimento horizontal total do retângulo usando essa barra (que não completa/ultrapassa o comprimento) na explicação?

Figura 1. Tarefa: Qual é o comprimento?

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Os estudantes, embora de forma remota, foram divididos em grupos de aproximadamente quatro estudantes cada para realizarem a tarefa.

Para a realização da mesma tarefa, porém com o Cuisenaire físico, foram convidados seis estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental em novembro de 2021, de uma escola estadual do Norte do Paraná, quando estava ocorrendo o retorno às aulas presenciais.

Para a realização das tarefas com o Cuisenaire físico, foram convidados seis alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em novembro de 2021, de uma escola estadual do Norte do Paraná. Todos assinaram o termo de assentimento livre e esclarecido e seus pais o termo de consentimento, ficando estabelecido por eles os seguintes codinomes a fim de garantir a confidencialidade de suas identidades: Emily, Júlia, João, Luc, Lauss e William. A escola disponibilizou

⁶ Neste trabalho, esses dados são utilizados de forma a fim de comparação com os dados coletados pela primeira autora deste trabalho, e assim, devido as limitações de espaço do artigo, não são explicitados seus nomes fictícios ou outros dados, os quais podem ser lidos nos trabalhos das autoras, conforme as referências: Doneda de Oliveira & Basniak (2021b), Oliveira & Cyrino (2013), Oliveira & Basniak (2021).

uma sala de aula para que as tarefas pudessem ser realizadas, de modo que os alunos e a professora respeitassem o distanciamento social previsto pela Organização Mundial da Saúde (OMS). Assim, utilizamos fita adesiva colorida para demarcar o distanciamento entre os estudantes, como ilustrado na Figura 10. A disposição das mesas também foi pensada de modo que a distância entre um aluno e outro fosse de 1 metro.



Figura 2. Organização da sala de aula

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Para essa intervenção, foi disponibilizado um material para cada estudante, com o intuito de não haver necessidade de troca de peças entre eles. Portanto, nesse contexto, os estudantes realizaram a tarefa de forma individual e não em grupo, como ocorreu com o Cuisenaire digital.

Assim, os dados que orientaram a análise foram compostos por, além daqueles produzidos e coletados por Doneda de Oliveira & Basniak (2021b), referente ao uso do Cuisenaire digital e por dados produzidos pela primeira autora deste trabalho, referente ao uso do Cuisenaire físico, os quais foram coletados por meio de gravações em vídeo, registros escritos dos estudantes e anotações diárias da pesquisadora. Para isso, foi utilizado um notebook e um celular para realizar as filmagens e auxiliar a pesquisadora na identificação dos estudantes e nas discussões. Com a finalidade de captar de forma nítida as falas dos estudantes, foi necessário deixar cada um dos aparelhos em pontos estratégicos da sala de aula.

A fim de situar o leitor quanto ao desempenho dos estudantes ao longo das aulas, apresentamos excertos e figuras, por ser o momento em que os estudantes expressaram suas ideias de maneira mais organizada, evidenciando suas compreensões e dúvidas. Para isso, as análises abordam o uso do Cuisenaire físico e Cuisenaire digital. A letra depois do nome Professora faz referência a professora que trabalhou utilizando o Cuisenaire Físico (Professora F) do Cuisenaire Digital (Professora D).

Para analisar os dados com olhar da perspectiva da Gênese Instrumental, consideramos dois artefatos: Cuisenaire digital e Cuisenaire físico, em como eles, por meio de esquemas de utilização, se tornam instrumentos utilizados na aprendizagem do estudante em relação ao conteúdo de fração.

RESULTADOS

Após esse primeiro contato dos estudantes com o material, a Professora F entregou a Tarefa em duas folhas sulfites: uma delas com o enunciado da tarefa e outra com o desenho de um retângulo, para que os estudantes determinassem seu comprimento horizontal usando barras físicas inteiras. Algumas barras, como pode ser visto na figura 3, ultrapassam o comprimento horizontal do retângulo. Em outras palavras, não era possível encontrar uma medida inteira com algumas barras.

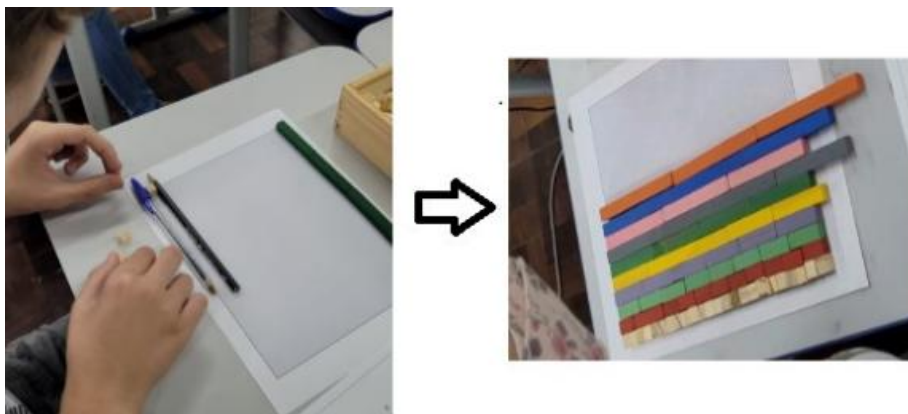


Figura 3. Dispondo as barras para medir o comprimento horizontal do retângulo
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em relação ao Cuisenaire digital, os estudantes demonstraram dificuldade em compreender o enunciado da Tarefa, precisando da intermediação da

Professora D que precisou explicar o significado da palavra horizontal. Logo, que os estudantes compreenderam o enunciado, não demonstraram dificuldade em manusear o *applet* em que estavam as barras, e iniciaram a disposição de todas as cores das barras, concluindo o item a) da Tarefa.

Manuseando o Cuisenaire físico, os estudantes relataram dificuldade para a Professora F para alinhar as barras, pois como estavam medindo o comprimento horizontal do retângulo na folha de sulfite, qualquer movimento brusco desordenava as barras dispostas. Então, buscaram alternativas usando outros artefatos (caneta, lápis) para ajudar a alinhar as barras menores do Cuisenaire (Figura 3) para conseguirem concluir o item a) da tarefa com êxito, medindo com todas as cores das barras. Identificamos a instrumentalização ao dispor as barras sobre a folha de papel e ao enfrentarem a dificuldade de alinhá-las. Compreendemos a instrumentação ao desenvolverem estratégias adequadas às características das barras físicas para conseguir medir o que era solicitado, utilizando artefatos auxiliares adequados. Nesse sentido, verificamos como um artefato desenvolvido para ser utilizado para determinado fim (caneta e lápis para escrever) pode se tornar um instrumento para atender outra necessidade (ajudar a alinhar as Barras Cuisenaire).

Neste contexto, o processo de transformação do artefato em instrumento está relacionado aos esquemas de uso aplicados ao artefato. Logo, todos os estudantes utilizaram a mesma quantidade de barras para medir o lado do retângulo.

Quanto ao Cuisenaire digital, os estudantes apresentaram facilidade em selecionar as barras e dispô-las para medir o comprimento horizontal do *applet*. Entendemos a instrumentalização quando o estudante realiza a ação de dispor as barras digitais no *applet*, estando atento para a sobreposição das barras digitais e a instrumentação, associada à análise da disposição das barras digitais para medir o que foi pedido na tarefa. Ao concluir o item a) da tarefa, nem todos os grupos obtiveram a mesma medida do comprimento do aplicativo. O Grupo 4 dispôs 53 brancas da direita para a esquerda a partir da intervenção da Professora D, orientando-os a usarem ferramenta Zoom para que as barras ficassem organizadas corretamente no *applet* de um lado ao outro. Logo, concluíram que a medida era de 31 barras (Figura 4a). Os grupos 1, 3 e 5, utilizaram as barras brancas como unidade de medida para as outras barras, utilizando 30 barras ao medir o comprimento do *applet*. Esses três grupos encontraram barras inteiras que completavam o comprimento e outras que faltavam e/ou sobravam. Ao usar a ferramenta Zoom, após a manipulação do material digital, é possível observar as barras dispostas. Portanto, caracteriza-

mos como instrumentação, pois por meio das barras digitais foi possível visualizar todas as barras, e partindo inicialmente da branca como uma unidade de medida para, assim, comparar as outras barras (Figura 4b). Identificamos a instrumentalização na ação dos estudantes de arrumar as barras lado a lado no software para medir o comprimento e a instrumentalização ao considerarem de forma diferente sua disposição.

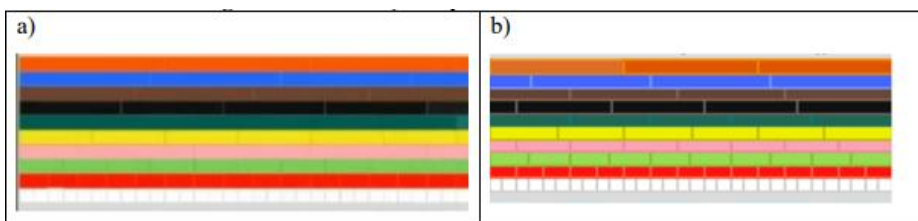


Figura 4. Diferença de quantidade de barras brancas

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Para medir o comprimento horizontal do retângulo com o auxílio das barras físicas, os estudantes identificaram que as barras amarela, azul, cinza e laranja excederam o limite do retângulo. Identificamos a instrumentação, pois o sujeito visualiza as barras com suas características físicas e nota quais barras ultrapassam a demarcação do retângulo (Figura 5a).

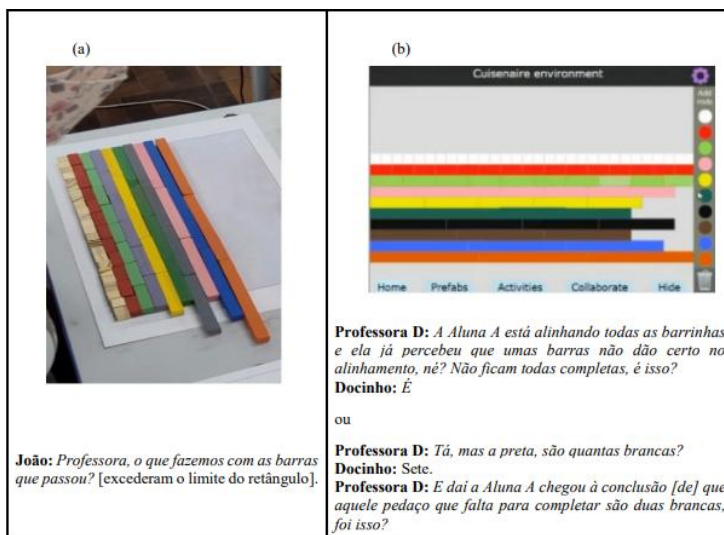


Figura 5. Comparação da Tarefa 1 Cuisenaire físico versus Cuisenaire digital

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em relação às barras digitais, o enunciado perguntava qual o comprimento horizontal da região do *applet*. Assim, os estudantes identificaram que as barras marrom, verde escura, azul, amarelo e rosa não completam o comprimento horizontal da região *applet* (Figura 5b). Neste contexto, identificamos a instrumentação, pois as barras digitais proporcionam ao sujeito uma visualização para resolver a tarefa.

Nessa situação, inicialmente com as barras físicas, verificamos a instrumentação na ação do sujeito, ao observar a disposição das barras e identificar quais cruzaram a delimitação do comprimento que deveria medir. Assim, a instrumentação está associada à influência do instrumento no pensamento dos estudantes nas barras físicas, referindo que excederam o limite do retângulo.

Concomitantemente, em relação às barras digitais, constatamos a instrumentalização quando, ao realizar a mediação, o sujeito percebeu as limitações e possibilidades do material digital, expressas por meio de falas dos estudantes relativas às barras digitais que faltariam para completar o comprimento horizontal da região do *applet*.

Na resolução da tarefa usando as barras físicas, identificamos que os estudantes, em geral, recorrem a palpites e valores aproximados, conforme o excerto abaixo.

Professora F: Medindo o retângulo com a barra laranja, quantas barras laranja cabem no meu comprimento horizontal do retângulo? Quantas barras laranja vamos ter?

João: Duas e pouco, ué [olha para as barras].

Júlia: Duas barras e um terço?

Professora F: E como você viu isso?

Júlia: Porque eu dividi em três, a barra, e o que está dentro é um terço.

Tarefa 1 – Intervenção Professora F.
Realização da Tarefa, 10/11/2021.

Para responder às indagações da Professora F, João olha para as barras, mas ainda não consegue dizer o valor correspondente da barra laranja, que estava sobrando no comprimento horizontal do retângulo. Sem a intervenção da Professora F, os estudantes realizaram a comparação entre as barras, mas Emily não conseguiu relacionar as barras, artefato utilizado por ela, com o conceito de frações. Portanto, nessa situação, Emily utiliza o artefato barras do Cuisenaire físico, como instrumento para realizar a medição, fazendo associações entre os tamanhos das barras, de acordo com o excerto a seguir, mas não consegue estabelecer responder a questão que lhe foi colocada.

Emily: Uma coisa que eu percebi, essas [barras] que sobraram tem praticamente o mesmo tamanho das outras peças [barras], de outras cores.

Professora F: Como assim?

Emily: Olha a cinza [barra], a parte que sobra [do comprimento do retângulo] tem praticamente o mesmo tamanho que a roxa [barra] [realiza fala fazendo a sobreposição das barras]. A amarela [parte que sobra] tem o mesmo tamanho que a branca.

Professora F: Hum, então qual é a medida do comprimento usando as barras cinza? [Estudante fica pensativa].

***Tarefa 1 – Intervenção Professora F.
Realização da Tarefa 1, 10/11/2021.***

Logo, percebemos a importância da magnitude para o entendimento de frações, assim como a flexibilidade e a razoabilidade se destacam pela sua importância (Powell & Ali, 2018). Os estudantes já possuíam contato com frações, mas não conseguiam relacionar o tamanho do número fracionário, mesmo que o próprio se apresentasse na forma não simbólica. Ao medir o comprimento do retângulo, todos os estudantes utilizaram 24 barras brancas, e devido a intervenção da Professora F, utilizaram como unidade de medida a barra branca. Portanto, realizaram comparações multiplicativas entre as barras para legitimar as ideias. Entretanto, parece que nesse contexto.

Incentivados pela Professora F, ao escrever a medida do comprimento utilizando frações, Lauss comparou a barra laranja à barra branca (Figura 6).



Figura 6. Comparação multiplicativa da barra laranja com a barra branca
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Professora F: Uma barra laranja são quantas barras brancas?

Lauss: [coloca a barra laranja embaixo das barras brancas – instrumentação]
Uma barra laranja são dez brancas.

Professora F: Então como fica o comprimento do retângulo utilizando a barra laranja? Lauss: Duas laranja e quatro brancas.

Professora F: Mas podemos usar duas cores de barras?

Lauss: [acrescenta quatro barras brancas acima da barra laranja, que ultrapassou o limite do retângulo – instrumentalização] Então vai ser duas barras laranja e quatro décimos.

***Tarefa 1 – Intervenção Professora F.
Realização da Tarefa 1, 10/11/2021***

Identificamos a diferença em ambos os materiais quanto à comparação multiplicativa, quando o estudante realiza a sobreposição de barras brancas acima de outras barras, com ambos os materiais, físico e digital. Identificamos, nessa situação, a instrumentalização, quando o sujeito, ao manipular as barras físicas, distingue facilmente a sobreposição delas, enquanto no material digital é necessário que ele observe a mudança de cores para identificar situação semelhante. A forma como o artefato influencia o pensamento do estudante não ocorre da mesma forma, pois na sobreposição de barras físicas, a altura é alterada, enquanto na sobreposição das barras digitais, a cor é alterada. Logo, as barras brancas como unidade de medida completam o comprimento horizontal do *applet*, na fileira das barras marrons (entre as barras azuis e pretas), conforme a Figura 7.

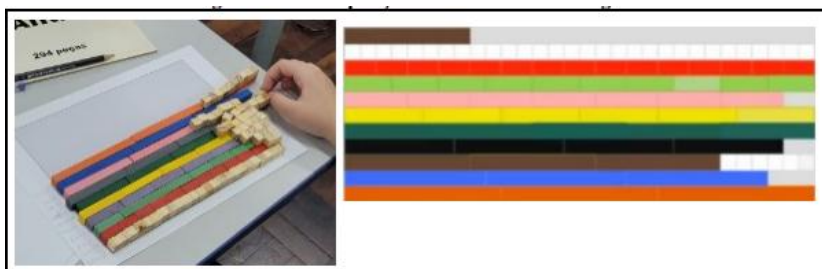


Figura 7. Sobreposição das barras físicas e digitais
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em relação às Barras Cuisenaire, qualquer uma de suas barras podem ser usadas como referencial de unidade de medida, por não possuírem um valor

fixo de unidade. Evidenciamos, nos excertos a seguir (Figura 8), estabelecendo relação entre o Cuisenaire físico e o digital com frações na perspectiva de medição, realizando uma comparação multiplicativa.

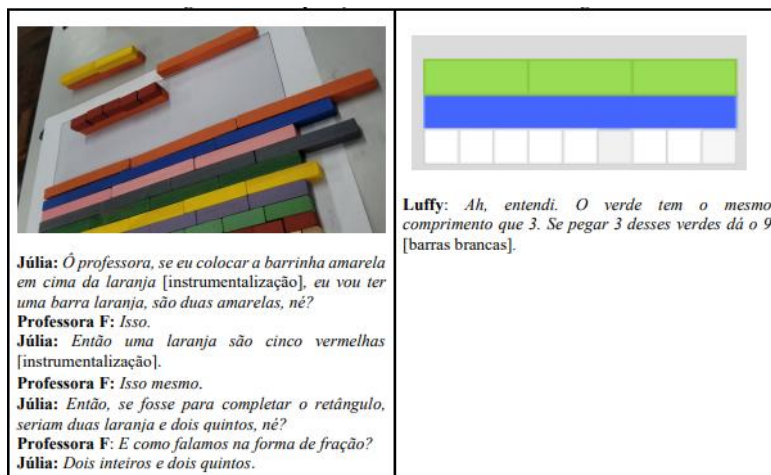


Figura 8. Comparação entre as barras físicas e digitais

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

No Cuisenaire físico, após as barras serem transformadas em instrumentos mediante as estratégias de comparação, Júlia abordou outro exemplo de relação comparativa da barra laranja com a barra vermelha, sendo caracterizada a instrumentalização. Assim, ela compartilhou a ideia com a equipe utilizando, a barra vermelha como unidade de medida para determinar o comprimento horizontal do retângulo.

Quanto ao Cuisenaire digital, também há a possibilidade de estabelecer a relação comparativa: no caso, Luffy após descobrir quantas barras brancas correspondem à barra azul, utilizou a barra verde como unidade de medida para comparar com a barra azul no *applet*. Assim, realizou comparações multiplicativas entre as barras branca, verde e azul. Nesta situação do Cuisenaire digital, identificamos a instrumentação quando o sujeito se apropriou das características das barras digitais, de suas limitações e possibilidades, e conseguiu realizar relações comparativas e de equivalência. No entanto, para demonstrar ao grupo sua ideia, resolveu manipular as barras e mostrar sua construção. Desse modo, a instrumentalização está relacionada à ação do sujeito em manusear as barras: azul, branca e verde, a fim de que seu grupo entendesse as potencialidades das barras digitais e pudesse resolver a tarefa.

Identificamos a instrumentalização em relação a ambos os materiais pela ação do sujeito de manipular as barras físicas/digitais para compreender como elas funcionam, tanto no software quanto no físico, o que foi necessário para resolver o que a solicitação a tarefa. As barras físicas e digitais, são artefatos em que são visualizados atributos de cores e tamanhos, mas quando utilizadas, se transformaram em um instrumento usado para medir, que contribuiu para o estudo de frações na perspectiva de medição. Isto porque permitiu ao estudante utilizar estratégias em que as barras assumem posição de instrumento para medir o lado do retângulo e do comprimento horizontal do *applet*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nas pesquisas de Powell (2018b), que trabalha com as barras de Cuisenaire Físicas e de Oliveira & Basniak (2021), que desenvolveram sua pesquisa com o Cuisenaire digital, delineamos o objetivo geral dessa pesquisa que foi investigar diferenças entre o uso do Cuisenaire digital e físico para o ensino de frações na perspectiva da medição.

O Cuisenaire físico contribuiu positivamente para a assimilação de conceitos teóricos de frações pelos estudantes, que se utilizaram de estratégias próprias do manuseio do material físico, realizando combinações entre as barras físicas. Já no Cuisenaire digital, os estudantes não demonstram dificuldades em manusear o *applet*, e sua utilização contribuiu para o engajamento dos estudantes, mas faziam sobreposição de peças por não saberem ou lembrarem.

Em relação às Barras Cuisenaire físico e digital, qualquer uma de suas barras podem ser usadas como referencial de unidade de medida, por não possuírem um valor fixo de unidade, estabelecendo relação entre as referidas barras em ambas as modalidades com frações na perspectiva de medição, realizando comparação multiplicativa.

Logo, identificamos a importância da magnitude para o entendimento de frações, bem como a flexibilidade e a razoabilidade, que se destacam pela sua importância (Powell & Ali, 2018). Os estudantes já possuíam contato com frações, mas não conseguiam relacionar o tamanho do número fracionário. Dessa forma, ao manusear o material, realizaram comparações multiplicativas, estabeleceram relações de equivalências entre as barras para legitimar as ideias ao escrever medidas utilizando frações na forma algébrica.

Fundamentada nessa pesquisa, afirmamos que tanto o Cuisenaire físico quanto o digital apresentam algumas características similares, pois os estudantes utilizaram os mesmos critérios para representar as barras; qualquer uma de suas barras podem ser usadas como unidade de medida; e as tarefas apresentadas em ambos foram realizadas com êxito.

Em relação às diferenças observamos, nos dois materiais, a comparação multiplicativa. Nessa situação, o sujeito, ao manipular as barras físicas, distingue facilmente a sobreposição delas, enquanto no material digital é necessário prestar atenção à mudança de cores para identificar situação semelhante. Na sobreposição de barras físicas, a altura é alterada; enquanto na sobreposição das barras digitais, a alteração ocorre na cor.

Entretanto, apesar dos empecilhos encontrados, o estudo (Doneda de Oliveira & Basniak, 2021b) norteou a presente pesquisa por meio de tarefas de natureza exploratória, com o uso do material Cuisenaire digital para ensinar frações na perspectiva de medição. A própria pesquisadora desenvolveu a tarefa adaptada para o material Cuisenaire físico, posteriormente, quando as aulas já haviam retornado para o modo presencial, mas seguindo algumas regras de distanciamento, possibilitando que a pesquisa fosse concretizada e atingindo todos os objetivos.

As tarefas assentes em práticas exploratórias são pensadas minuciosamente, tanto com relação ao professor, que precisa pensar, planejar suas ações e possíveis resoluções dos estudantes, sendo elaborado um quadro de antecipação para sanar as possíveis dúvidas, quanto ao papel dos estudantes, pois eles são protagonistas do seu aprendizado. O EEM “requer do professor um planejamento minucioso, prevendo situações que os alunos possam enfrentar e meios para auxiliá-los, e que, mesmo com os quadros de antecipação/orientação, podem surgir situações não previstas, para as quais não se tenha respostas prontas” (Oliveira & Basniak, 2021, p. 24).

Portanto, depreendemos que a metodologia do EEM interferiu positivamente para os resultados alcançados, pois exigia constantemente a interação do professor com os estudantes.

Considerando os objetivos desta pesquisa, debruçamo-nos sobre o estudo de frações e números racionais. Nesse sentido, a não compreensão dos números racionais acarreta problemas futuros em estudos na Matemática, como na Álgebra (Kieren, 1980). Ademais, para os estudantes não desenvolverem problemas algébricos, é preciso entender a noção de equivalência de frações, conceito de inverso, generalização e abstração de ideias diferentes dos cálculos de números naturais e inteiros (Kieren, 1980). Assim, compreender frações

envolve conhecer suas diferentes interpretações, sendo todas importantes para o conhecimento dos estudantes (Behr *et al.*, 1983; Kieren, 1976, 1980). A ideia de frações se baseia em duas perspectivas de ensino diferentes: partição e medição (Powell, 2019b).

A ideia de frações se baseia em duas perspectivas de ensino diferentes: partição e medição (Powell, 2019b). Relacionado à Gênese Instrumental, as barras físicas e digitais, artefatos em que são visualizados atributos de cores e tamanhos, podem se transformar em um instrumento usado para medir, contribuindo para a aprendizagem de frações na perspectiva de medição. Isso porque permite ao estudante utilizar estratégias em que as barras assumem posição de instrumento para realizar as medidas, conforme os objetivos das tarefas.

REFERENCIAS

- Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6(8), 13-33.
- Bailey, D., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 447-455. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004>
- Basniak, M. I., & Estevam, E. J. G. (2019). Uma lente teórica para analisar o potencial das tecnologias digitais do Ensino Exploratório de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(2), 738-747.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In: Lesh, R.; Landau, M. (Ed.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (p. 126). Academic Press.
- Bertoni, N.E. (2008). A construção do número fracionário. *Boletim de Educação Matemática*, 21(31). UNESP.
- Bittar, M. A. (2011). Abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. *Educar Em Revista*, 1, 157-171. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400011>

- Botas, D., & Moreira, D. (2013). A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática: Um estudo no 1º ciclo. *Revista Portuguesa de Educação*, 26(1), 253–286. <https://doi.org/10.21814/rpe.3259>
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- Cyrino, M. C. C. T., & Teixeira, B. R. O. (2016). Ensino Exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia. Em: Cyrino, M. C. C. T. (Ed.), *Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática: Elaboração e perspectivas* (pp. 15-19). EDUEL.
- Doneda de Oliveira, V. S., & Basniak, M. I. (2021a). Fracciones: Comprensión de alumnos del 6o año em prácticas de enseñanza exploratoria orientados por la perspectiva de medición. *Paradigma*, 42(3), 307-339). <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p307-339.id1133>
- Doneda de Oliveira, V. S., & Basniak, M. I. (2021b). O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. *Revista Educação Matemática Debate*, 5(11), 1-29. <https://doi.org/10.46551/emd.e202108>
- Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M.-A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y.C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., & Meagher, M. (2005). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In: C. Hoyles, & J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. New ICMI Study Series, vol 13*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_7
- Estevam, E. J. G., & Basniak, M. I. (2019). Mobilização do pensamento estatístico no ensino exploratório. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(2), 205-214.
- Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In: F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-356). Information Age Publishing.

- Godoy, K. V. (2015). O Papel e contribuições matemáticas das sociedades científicas do norte da Inglaterra em fins do século XVIII. *Anais XIX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, Juiz de Fora.
- Guimarães, W. N. (2015). *Um estudo sobre a inserção tecnológica na formação continuada de docentes de matemática* [Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro]. Repositório de Múltiplos Acervos da UFRRJ: <https://rima.ufrj.br/jspui/handle/20.500.14407/13244?mode=full>
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: R. Lesh (Org.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Eric/Smeac.
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct – Its elements and mechanisms. In: T. E. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp.125-150). Eric/Smeac.
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3. ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203803165>
- Ni, Y., & Zhou, Y.D. (2005). Teaching and learning fraction numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 25-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3
- Oliveira, H., & Cyrino, M. C. C. T. (2013). Developink knowledge of inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: One study with perspective mathematics teachers. *Sisyphus*, 1(3), 214-245.
- Oliveira, V. S. D., & Basniak, M. I. (2021). O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. *Educação Matemática Debate*, 5(11), 1-29. <https://doi.org/10.46551/emd.e202108>
- Pinto, N. B. (2005). Marcas históricas da matemática moderna no Brasil. *Revista Diálogo Educacional*, 5(16), pp. 25-38. <https://doi.org/10.7213/rde.v5i16.7916>
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

- Powell, A. B. (2018a). Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC*, 13(29), 78-93.
- Powell, A. B. (2018b). Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. *Revista Perspectiva*, 36(2), 399-420. <https://doi.org/10.5007/2175-795X.2018v36n2p399>
- Powell, A. B. (2019a). Measuring perspective of fraction knowledge: Integrating historical and neurocognitive findings. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática (ReviSeM)*, 4(1), 1-19. <https://doi.org/10.34179/revisem.v4i1.11286>
- Powell, A. B. (2019b). Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. *RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 9(2), 50-68.
- Powell, A. B. (2019c). Como uma fração recebe seu nome. *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: ReBECCEM*, 3(3), 700-713. <https://doi.org/10.33238/ReBECCEM.2019.v.3.n.3.23846>
- Powell, A. B., & Ali, K. V. (2018). Design research in mathematics education: Investigating a measuring approach to fraction sense. In: J. F. Custódio (Org.), *Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para Pesquisa e Ensino* (pp. 221-242). Livraria da Física.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Rabardel, P. (2002). *Pessoas e tecnologia: uma abordagem cognitiva dos instrumentos contemporâneos*. Université Paris 8.
- Rocha, M. R. (2013). *Empreendimentos de uma comunidade de prática de professores de matemática na busca de aprender e ensinar frações*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina]. RIUEL. <https://repositorio.uel.br/items/64d9b7f3-8fb7-41af-ac8c-6afc718ee4c0/full>

- Scheffer, N. F., & Powell, A. B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *REVEMOP*, 1(3), 476-503. <https://doi.org/10.33532/revemop.v1n3a08>
- Secretaria do Estado da Educação [SEED]. (2008). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática*. Autor.
- Silva, M. J. F. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. [Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo]. Repositorio PUCSP. <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/10923>

Cómo citar el artículo

Oliveira, I. P., & Basniak, M. I. (2025). Estudo de frações na perspectiva da medição por meio do cuisenaire físico e digital. *Revista de Investigación en Matemática y su Enseñanza (RIME)*, 2(1), 1-24. <https://doi.org/10.32735/S2810-7187202500014066>

Licencia

© 2024 Los autores. Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos de la licencia [Creative Commons Atribución 4.0 Internacional \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).